ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Διάλεξη 19η

18/04/2018.

Συμπερασματολογία για το διωνυμικό p

n δοκιμές Bernoulli, $p = P(E)$, E = επιτυχία.

X = αριθμός E στις n δοκιμές.

$$\boxed{X \sim Bin(n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0,1,\dots,n}$$

$\boxed{E(X) = np}$, $\boxed{Var(X) = np(1-p)}$ | ενδιαφέρει το p

$$\boxed{\hat{p} = \frac{X}{n}}, \boxed{E(\hat{p}) = \frac{np}{n} = p}, \boxed{Var(\hat{p}) = \frac{Var(X)}{n^2} = p(1-p)/n}$$

$$\boxed{\hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}}$$

Για να ελέγξουμε υποθέσεις της μορφής:

(i) $H_0 : p \leq p_0$ (γνωστό) v $H_a : p > p_0$

(ii) $H_0 : p \geq p_0$ v $H_a : p < p_0$

(iii) $H_0 : p = p_0$ v $H_a : p \neq p_0$

Χρησιμοποιούμε το στατιστικό X (που έχει $Bin(n, p_0)$ όταν H_0 αληθής) και για επίπεδο σημαντικότητας α, οι κρίσιμες περιοχές είναι:

(i) $X \geq k_\alpha$

(ii) $X \leq k'_\alpha$

(iii) $X \leq k'_{\alpha/2}$ και $X \geq k_{\alpha/2}$, όπου k_α και k'_α

ο μικρότερος και μεγαλύτερος αντίστοιχα ακέραιος για τους οποίους $\boxed{\sum_{x=k_\alpha}^{n} \binom{n}{x} p_0^x (1-p_0)^{n-x} \leq \alpha}$ και $\boxed{\sum_{x=0}^{k'_\alpha} \binom{n}{x} p_0^x (1-p_0)^{n-x} \leq \alpha}$

π.χ

$H_0: p=\frac{1}{3}$ v $H_a: p>\frac{1}{3}$, $x \geq k_{0,05}$, $n=10$

$k_{0,05}$ = ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει:

$$\sum_{x=k_{0,05}}^{10} \binom{10}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x} \leq 0,05$$

$$\underbrace{X \overset{H_0}{\sim} Bin\left(10, \frac{1}{3}\right)}$$

$P(X=10) = 0,000017$

$P(X=9) = 0,000336$

$P(X=8) = 0,003097$

$P(X=7) = 0,0161668$

$P(X=6) = 0,056678$

$P(X=10)$ έως $P(X=7)$ $\Rightarrow$ $P(X \geq 7) = 0,019548 \leq 0,05 \ (=\alpha)$

$P(X=10)$ έως $P(X=6)$ $\Rightarrow$ $P(X \geq 6) = 0,076933 > 0,05$

αυτή εδώ η ανισότητα ισχύει και για $x=10,9,8,7$ (επιλέγω την μικρότερη τιμή)

Άρα $k_{0,05}=7$

$X \overset{\text{προσεγ.}}{\sim} N(np, np(1-p)) \rightarrow \hat{p} = \frac{X}{n} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(p, p(1-p)/n) \rightarrow$

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{\text{προσεγ.}}{\sim} N(0,1)$$

Για να ελέγξουμε υποθέσεις αναλογίας:

(i) $H_0: p \leq p_0$ (γνωστό) v $H_a: p > p_0$

(ii) $H_0: p \geq p_0$ v $H_a: p < p_0$

(iii) $H_0: p = p_0$ v $H_a: p \neq p_0$

χρησιμοποιούμε το στατιστικό $Z = \dfrac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ $\left(\overset{H_0}{\underset{\text{προσεγ.}}{\sim}} N(0,1)\right)$

και για επίπεδο σημαντικότητας α οι κρίσιμες περιοχές είναι:

(i) $Z \geq z_\alpha$

(ii) $Z \leq -z_\alpha$

(iii) $|Z| \geq z_{\alpha/2}$

και

$(1-\alpha)100\%$ Δ.Ε. (διάστημα εμπιστοσύνης) για το

p: $\boxed{L = \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}}$ και $\boxed{U = \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}}$

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{\text{προσεγγ.}}{\sim} N(0,1) \rightarrow \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \overset{\text{προσεγγ.}}{\sim} N(0,1)$$

$(U-L=)\ 2\omega = 2 z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$

$$\boxed{n = \hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{z_{\alpha/2}}{\omega}\right)^2 \le \frac{1}{4}\left(\frac{z_{\alpha/2}}{\omega}\right)^2}$$

$\rightarrow \hat{p}(1-\hat{p}) \le \frac{1}{4}$ (για $p \in (0,1)$)

<u>Παράδειγμα 4.4.</u>

$(1-\alpha)100\%$ Δ.Ε. για p: $\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$

$n = 2789$, έγιναν κλήσεις και επέστρεψαν για νέα τριετία

οι $x = 2.431$.

p = πιθαν. λύσης : $\boxed{\hat{p} = \frac{2431}{2789} = 0{,}872}$ και $\boxed{95\%\ \text{Δ.Ε. για}\ p: L = 0{,}8.\ U = 0{,}884}$

$H_0: p = 0.9$ v $H_0: p \ne 0.9$.

$$z = \frac{0.872 - 0.9}{\sqrt{0.9(1-0.9)/2789}} = -4.91$$

κρίσιμη περιοχή :

$|z| > z_{0,025} = 1.96$ απορρ. H_0

Συμπερασματολογία για την διαφορά 2 ποσοστών (παρ. επ.). Μεταβλητή κατά Δείγμα - Τεστ του McNemar.

Παράδ. 4.2

A	+	+	-	-	
B	+	-	+	-	
Σύνολο	25	14	4	17	60

	B^+	B^-	Σύνολο
A^+	25	14	39
A^-	4	17	21
Σύνολο	29	31	60

$+ = E$

$- = A$

$H_0: p_1 = p_2$

Γενικά: Τα μέλη ενός πληθυσμού υποβάλλονται σε 2 δοκιμασίες με σκοπό την σύγκριση της αποτελεσματικότητάς τους. Έστω p_1 και p_2 οι άγνωστες πιθανότητες επιτυχίας των δοκιμασιών 1 και 2 αντίστοιχα. N μέλη του πληθυσμού επιλέγονται τυχαία και το καθένα υποβάλλεται σε 2 δοκιμασίες.

Δοκιμασίες 1	Δοκιμασίες 2	Αριθμοί ζευγών
E	E	x
E	A	y
A	E	z
A	A	ω

		ΔΟΚΙΜΗ 2 E	ΔΟΚΙΜΗ 2 A	Σύνολο
ΔΟΚΙΜΗ 1	E	x	y	x+y
ΔΟΚΙΜΗ 1	Δ	z	ω	z+ω
Σύνολο		x+z	y+ω	N

$p_1 = P(E)$ για δοκ. 1.

$p_2 = P(E)$ για δοκ. 2.

$H_0: p_1 = p_2$.

$\hat{p}_1 = \frac{x+y}{N}$, $x+y \sim Bin(n, p_1)$

$\hat{p}_2 = \frac{x+z}{N}$, $x+z \sim Bin(n, p_2)$

και $x+y$, $x+z$ δεν είναι ανεξ. τ.μ.

$$\left.\begin{aligned} E(x+y) &= n p_1 \\ E(x+z) &= n \cdot p_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E[(x+y)-(x+z)] = Np_1 - Np_2 = 0$$

όταν Ho αληθής

$\rightsquigarrow \boxed{E(y) = E(z)}$

Αν $y+z=n$, $\boxed{y \sim Bin(n, \tfrac{1}{2}) \rightsquigarrow y \approx N(\tfrac{n}{2}, \tfrac{n}{4})}$

Άρα $u = \dfrac{y - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \underset{H_0}{\overset{\text{προσεγγ.}}{\sim}} N(0,1)$, και αυτό είναι γνωστό ως τεστ McNemar.

Έτσι για παράδειγμα με έναν δίπλευρο έλεγχο

$\boxed{u = \dfrac{y - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}, \ y \geq \frac{n}{2}}$ και $\boxed{u = \dfrac{y - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}, \ y < \frac{n}{2}}$

<u>Εφαρμογή</u> : $H_0 : p_1 = p_2$ v $H_a : p_1 \neq p_2$.

$n = 11 + 7 = 18$.

$$U = \frac{14 - \frac{18}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{18}}{2}} = 2,12 ,$$

$|z| \geq z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$.

και επειδή $2.12 > 1.96$ απορρίπτεται το H_0.

και για την <u>τιμή p</u> : $P(|U| \geq 2.12) = 2P(U \geq 2.12)$

$= 2 * 0.017$

$= 0.034 < 0.05 (=\alpha)$

άρα απορρίπτ. H_0.